Tentamen Lineaire Algebra 1, 25 april 2008

De toets bestaat uit 6 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. U moet de antwoorden beargumenteren. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal de rang van A.

b. Bepaal de dimensie van de nulruimte $N(A)$ van A.

c. Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel $Ax = 0$.

d. Laat de vector b gegeven zijn door

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel $Ax = b$.

2. Stel $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en $b \in \mathbb{R}^m$. Beschouw het stelsel lineaire vergelijkingen $Ax = b$, met onbekende $x \in \mathbb{R}^n$. Laat $R(A)$ de kolomruimte van A zijn, i.e. de deelruimte opgespannen door de kolommen van A. Laat $N(A)$ de oplossingsverzameling zijn van het bijbehorende homogene stelsel $Ax = 0$.

a. Toon aan dat het stelsel $Ax = b$ een oplossing heeft dan en slechts dan als $b \in R(A)$.

b. Toon aan dat $N(A) = \{0\}$ dan en slechts dan als de kolommen van A lineair onafhankelijk zijn.

c. Stel $b \in R(A)$. Toon aan dat $Ax = b$ precies één oplossing x heeft dan en slechts dan als de kolommen van A lineair onafhankelijk zijn.

3. Definieer de lineaire afbeelding L van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^3$ door

$$L(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal de matrix van L ten opzichte van de standaard-basis in $\mathbb{R}^3$.

b. Bepaal een basis van de kern $\ker(L)$ van L.

c. Bepaal de dimensie van de range $L(\mathbb{R}^3)$ van L.

d. Bepaal een basis van $L(\mathbb{R}^3)$.

4. Voor een gegeven geheel getal n is P_n de vectorruimte van alle polynomen van graad kleiner dan n, met reële coefficienten.

a. Geef een basis van P_n.

b. Bepaal de dimensie van P_n.

Definieer de afbeelding $T : P_4 \to P_4$ door

$$T(p(x)) := p(x) - xp'(x)$$

c. Laat zien dat T een lineaire afbeelding is.

d. Bepaal de kern $\ker(T)$ van T.

e. Bepaal de matrix $[T]_E$ van T ten opzichte van de geordende basis $E := \{1, x, x^2, x^3\}$.

f. Bepaal de rang van $[T]_E$.

5. Stel x en y lineair onafhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^n$. Laat S de deelruimte zijn van $\mathbb{R}^n$ opgespannen door x en y, i.e. $S = \mathrm{span}(x, y)$. Definieer een $n \times n$ matrix A door

$$A = xy^T + yx^T.$$

a. Toon aan dat A symmetrisch is.

b. Toon aan dat $N(A) = S^\perp$.

c. Toon aan dat de rang van A gelijk is aan 2.

6. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal het karakteristieke polynoom van A.

b. Bepaal de eigenwaarden van A.

c. Bepaal de eigenvectoren van A

c. Ga na of A diagonaliseerbaar is.

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 15
Vraagstuk 2: 15
Vraagstuk 3: 15
Vraagstuk 4: 15
Vraagstuk 5: 15
Vraagstuk 6: 15